



Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Ingeniería en Control y Automatización

Academia de Electrónica

Bitácora Alumnos 7AV

Unidad Temática: Tecnología de Mecanismos

Cinemática



Profesor M. En C. Félix Alberto Calzada Guzmán

México D. F. a 27 de enero de 2012

Índice general

Objetivo de la asignatura	v
1. Introducción a los mecanismos y su cinemática	1
1.1. Introducción a los mecanismos	2
1.1.1. Mecanismo	2
1.1.2. Elemento de máquina	2
1.1.3. Máquina	2
1.1.4. Eslabonamiento	3
1.1.5. Eslabonamiento de cuatro barras	3
1.1.6. Cadenas de seis barras	6
1.2. Introducción a la cinemática de los mecanismos	7
1.2.1. Cadenas cinemáticas	7
1.2.2. Movimiento plano	7
1.2.3. Movimiento relativo	7
1.2.4. Diagramas cinemáticos	8
1.2.5. Grados de libertad	10
2. Cinemática del Mecanismo plano de cuatro barras	14
2.1. Análisis de desplazamiento	15
2.1.1. Ley de Grashof	15
2.1.2. Ángulo de transmisión y de desviación	16
2.1.3. Análisis de desplazamiento: método analítico	16
2.2. Concepto del Movimiento Relativo	18
2.3. Análisis de Velocidad: Método Gráfico	19
2.3.1. Velocidad absoluta del punto B	21
2.3.2. Diferencia de Velocidades	22
2.4. Análisis de Velocidad: Método Analítico	22
2.5. Movimiento plano	22
2.5.1. Velocidad absoluta y relativa en el movimiento plano	23
2.6. Centros Instantáneos	24
2.6.1. Teorema de Kennedy de los tres centros	25
2.6.2. Relación velocidad angular con la distancia entre centros instantaneos	25
2.6.3. Centro instantáneo de rotación	26
Simulación de la cinemática de mecanismos planos de cuatro barras	28

Prácticas, Trabajos y Reactivos de autoevaluación para el 1er Departamental	29
Bibliografía	44
Indice Alfabético	44
A. Introducción a la física clásica	46

Índice de figuras

1.1.	Notación para un eslabonamiento de cuatro barras	3
1.2.	Diagramas del atlas de curvas acopladoras de cuatro barras	3
1.3.	Tareas de mecanismos de cuatro barras	4
1.4.	Modelo a escala de la bomba de petróleo Minnesota	5
1.5.	Mecanismo tradicional de bombeo del American Petroleum Institute	5
1.6.	Un nuevo sistema de frenado	6
1.7.	La cadena de cuatro barras de corredera y manivela	6
1.8.	Un mecanismo operador de una ventana batiente en dos posiciones	8
1.9.	Diagrama cinemático equivalente, croquis, de la fig. 1.4	8
1.10.	Vista en corte de un motor de desplazamiento variable.	9
1.11.	Eslabonamiento de desplazamiento variable	10
1.12.	Cadena de eslabones conectados entre sí para formar un eslabonamiento	10
1.13.	Un eslabón solo localizado en un plano XY	11
2.1.	Mecanismo de cuatro barras.	17
2.2.	Análisis gráfico de desplazamientos del mecanismo de cuatro barras.	18
2.3.	Movimiento de un eslabonamiento.	20
2.4.	El eslabón 2 pivotea en el eslabón a tierra 1 en A_0 y gira en sentido anti-horario con velocidad angular.	20
2.5.	Velocidad absoluta V_A del punto A sobre el eslabón giratorio 2.	20
2.6.	Determinación de la diferencia de velocidad $V_{B/A}$ del punto B con respecto al punto A por medio del triángulo de vectores.	21
2.7.	Centros instantáneos en un mecanismos plano de cuatro barras	24
2.8.	Centros instantáneos en un mecanismos plano de cuatro barras	25
2.9.	Ejercicio 1	37
2.10.	Ejercicio 2	38
2.11.	Ejercicio 3	39

Índice de cuadros

2.1. matriz de combinaciones de un mecanismo	18
2.2. Graficar una función y una trayectoria	31

Objetivo de la asignatura

Esta propuesta tiene como objetivo cubrir los requisitos teóricos para las asignaturas manipuladores robóticos y manipuladores industriales.

De un análisis bibliográfico sobre las asignaturas manipuladores robóticos y manipuladores industriales II se encontrarán las siguientes palabras claves a) cinemática, b) grado de libertad, c) eslabonamiento, d) cadena cinemática, e) programable, f) reprogramable.

Capítulo 1

Introducción a los mecanismos y su cinemática

Objetivo de la unidad: Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de describir, aplicar y calcular mecanismos planos.

1.1. Introducción a los mecanismos

La matemática, la física y la química son las ciencias fundamentales en que se basa la ingeniería. En la mayoría de los casos, la ingeniería implica el análisis de la conversión de energía de alguna fuente hacia una o más salidas, usando uno o más de los principios básicos de esas ciencias, G. Sandor ¹ y J. Craig ².

La mecánica de sólidos es una de las ramas de la física que, entre otras cosas, contiene otras ramificaciones principales:

- La cinemática, que trata del estudio del movimiento relativo.
- La estática, que es el estudio de fuerzas y momentos, separados del movimiento, la cinética, que trata de la acción de las fuerzas sobre los cuerpos.

La combinación de la cinemática y la cinética se denomina dinámica.

1.1.1. Mecanismo

Un es un dispositivo mecánico que tiene el propósito de transferir el movimiento y/o fuerza de una fuente de salida.

1.1.2. Elemento de máquina

Se conoce como elemento de máquina a los engranes poleas, eslabones, bandas, etc. También se dice que un elemento de máquina es la mínima entidad o entidad básica en una máquina.

De acuerdo a G. Sandor ¹ y J. Craig ² un mecanismo es un conjunto de elementos de máquina configurados o agrupados para un fin, como transmitir potencia, graficar una función o describir una trayectoria. La entidad superior conocida como máquina no es más que un conjunto de mecanismos diseñados, configurados y agrupados para un fin específico.

Los elementos de máquina se pueden clasificar en dos categorías principales elementos de máquina flexibles y elementos de máquina rígidos. Los elementos de máquina flexibles son aquellos como las poleas y las bandas transmisoras de potencia cuya característica principal es que cuando se realiza un mantenimiento mecánico son desechadas y reemplazadas por unas nuevas. Mientras que con los elementos rígidos, engranes, ejes, eslabones etc; durante un mantenimiento industrial estos pueden ser vueltos ha ser utilizados, si cumplen ciertas normas de mantenimiento industrial.

1.1.3. Máquina

Una máquina puede estar compuesta o integrada por elementos de máquina tanto flexibles como rígidos, como por ejemplo en el motor de un automóvil.

1.1.4. Eslabonamiento

Un eslabonamiento consiste en eslabones (o barras), generalmente considerados rígidos, conectados por juntas, como pasadores o resolutas o juntas prismáticas, para formar cadenas (o lazos) abiertas o cerradas.

1.1.5. Eslabonamiento de cuatro barras

Los mecanismos se usan en una gran variedad de máquinas y dispositivos. El más simple es el de cuatro barras, que tiene tres eslabones móviles (más un eslabón fijo) y cuatro juntas revolutas, de pivote o de pasador, fig. 1.1.

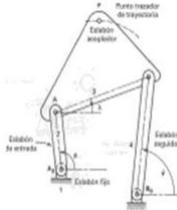


Figura 1.1: Notación para un eslabonamiento de cuatro barras

El eslabón conectado a la fuente de potencia se llama eslabón de entrada A_0A . El eslabón seguidor conecta el pivote móvil B al pivote B_0 de tierra. El eslabón acoplador o flotante conecta los dos pivotes móviles, A y B , acoplando el eslabón de entrada con el eslabón de salida. Puntos sobre el eslabón acoplador (llamados puntos trazadores de trayectorias) trazan en general curvas acopladoras algebraicas de sexto orden. La fig. 1.2 está tomada de , en donde curvas acopladoras (líneas de rayas) muy diferentes pueden ser generadas usando diferentes puntos trazadores de trayectorias (los círculos sólidos pequeños).

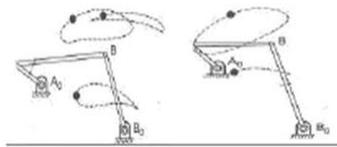


Figura 1.2: Diagramas del atlas de curvas acopladoras de cuatro barras

El eslabonamiento de cuatro barras es la cadena más básica de eslabones conectados por pasadores que permite movimiento relativo entre los eslabones (tres eslabones articulados entre sí constituyen una estructura). No obstante que se trata de un mecanismo simple, las cuatro barras forman un mecanismo muy versátil usado en miles de aplicaciones. Los ejemplos mostrados en las figuras 1.2, 1.3 ilustran un amplio rango de usos de las cuatro barras. Aunque esas aplicaciones son bastante diferentes, los eslabonamientos mostrados en los ejemplos (así como todos los mecanismos) pueden clasificarse en tres categorías dependiendo de las tareas que realizan: generación de función, generación de trayectoria y generación de movimiento (o guía de cuerpo rígido).

Un generador de función es un eslabonamiento en el que el movimiento relativo (o fuerzas) entre eslabones conectados a tierra es de interés. En la generación de función, la tarea no requiere un punto trazador de trayectoria sobre el eslabón acoplador. En la generación de trayectoria, nos interesa sólo la trayectoria de un punto trazador y no la rotación del eslabón acoplador. En la generación de movimiento es de interés el movimiento total del eslabón acoplador: las coordenadas x , y del punto trazador de trayectoria y la orientación angular del eslabón acoplador.

En la fig. 1.2 se muestran los diagramas de del atlas de curvas acopladoras de cuatro barras por Hrones y Nelson [1]; las longitudes de las rayas de las curvas indican incrementos de 100 en las rotaciones de la manivela. Aquí, las longitudes de las rayas no están a escala. Los círculos sólidos son puntos de trazadores de trayectorias diferentes.

La fig. 1.3 muestra un eslabonamiento diferente de cuatro barras que ha sido usado para efectuar cada tarea. La grúa de amantillado a nivel en la fig. 1.3a es un eslabonamiento de cuatro barras de tipo especial que genera aproximadamente un movimiento en línea recta del punto trazador de trayectoria (punto P). Las grúas de este tipo tienen una capacidad aproximada de 50 toneladas y tienen un desplazamiento aproximadamente en línea recta del punto trazador acoplador de cerca de 9 m de largo. Como se tiene un gancho en el punto trazador de trayectoria que sostiene una cuerda de alambre (que siempre cuelga verticalmente), la orientación del eslabón acoplador no es importante. Se tiene aquí una obvia tarea de generación de trayectoria. a fig. 1.3b es un eslabonamiento impulsor para un aspersor rota-

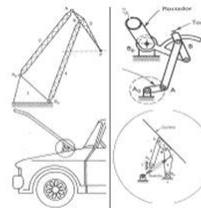


Figura 1.3: Tareas de mecanismos de cuatro barras

tivo para césped que es ajustable para obtener rangos diferentes de oscilación en la cabeza del aspersor. Este eslabonamiento ajustable puede usarse para variar el ángulo de rotación de la cabeza del aspersor usando el tornillo de apriete para cambiar el punto de unión de los eslabones acoplador y seguidor. Las rotaciones relativas entre los eslabones de entrada y seguidor en este mecanismo cumplen la tarea deseada de generación de función.

La fig. 1.3c muestra el diseño de un eslabonamiento de cuatro barras, para la cubierta del motor de un auto. El eslabonamiento controla la orientación relativa entre la cubierta del motor y el bastidor. La cubierta del motor no debe interferir con el bastidor al abrir y debe quedar ajustada al ras en la cavidad del vehiculo en la posición cerrada. Las posiciones x , y de un punto trazador de trayectoria en el extremo de la cubierta así como el ángulo de ésta con respecto al auto son críticos. Se trata en este caso de una generación de movimiento.

La fig. 1.4 muestra otro ejemplo de un mecanismo de cuatro barras que genera una

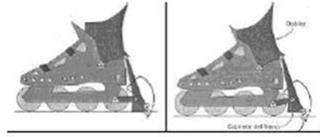


Figura 1.6: Un nuevo sistema de frenado

entrada. Cuando se desea frenar, el patinador alineado mueve su dedo gordo hacia adelante, ocasionando la rotación de la parte inferior de la pierna respecto a la junta del talón. La rotación relativa resultante entre el dobléz y la bota (rotación de entrada) mueve el cojinete del freno hacia abajo poniéndolo en contacto con la superficie de patinaje (movimiento de salida), reduciendo así la velocidad del patinador alineado. Este mecanismo es también ajustable; el eslabón acoplador está diseñado para alargar y ajustar la respuesta del eslabonamiento conforme el cojinete del freno se desgasta. La salida de este mecanismo es la traslación y rotación del cojinete del freno que es una parte del eslabón acoplador del mecanismo de cuatro barras. Así, la posición de un punto trazador de trayectoria (la punta inferior derecha del cojinete) así como la orientación del fondo del cojinete son de interés primordial, que es la definición de la generación de movimiento.

El mecanismo de cuatro barras tiene algunas configuraciones especiales cuando uno o más eslabones son de longitud infinita. El mecanismo de corredera y manivela (o manivela y deslizador) en la fig. 1.7 es una cadena de cuatro barras con un deslizador reemplazando un eslabón de salida infinitamente largo. Nótese que el eslabón (y su pivote revoluto) de longitud infinita puede ser simplemente reemplazado por un bloque deslizador y una junta de corredera. El eslabonamiento de cuatro barras y el de corredera manivela tienen ambos cuatro eslabones y ambos son considerados cadenas de cuatro barras.



Figura 1.7: La cadena de cuatro barras de corredera y manivela

El motor de combustión interna se construye con base en el mecanismo de deslizador y manivela; la manivela es el eslabón 2, la biela es el acoplador (eslabón 3) y el pistón es el deslizador (eslabón 4).

Existen otras formas de mecanismos de cuatro barras en los que un deslizador es guiado sobre un eslabón móvil en vez de sobre uno fijo. Esos mecanismos se llaman inversiones del de manivela y deslizador, producidos cuando otro eslabón (la manivela, el acoplador o el deslizador) es el fijo.

1.1.6. Cadenas de seis barras

Si un eslabonamiento de cuatro barras no proporciona el tipo de desempeño requerido para una aplicación particular, usualmente se considera como siguiente posibilidad uno de

los dos tipos de de un solo grado de libertad (*con siete juntas de revoluta*):

1. la **cadena Watt**.
2. la **cadena Stephenson**.

Estas clasificaciones dependen de la colocación de los eslabones ternarios (miembros con tres juntas revolutas). En la cadena **Watt**, los eslabones ternarios son adyacentes; en la cadena Stephenson, los eslabones ternarios están separados por eslabones binarios (eslabones con sólo dos juntas revolutas). Varias aplicaciones donde se han empleado cadenas de seis barras nos ayudarán a familiarizarnos con esos eslabonamientos.

1.2. Introducción a la cinemática de los mecanismos

1.2.1. Cadenas cinemáticas

Tales cadenas cinemáticas, con un eslabón fijo como mínimo, son:

1. Mecanismos si, por lo menos, otros dos eslabones retienen movilidad.
2. Estructuras, si no hay movilidad alguna.

En otras palabras, un mecanismo permite el movimiento relativo entre eslabones rígidos; una estructura, en cambio no lo permite.

1.2.2. Movimiento plano

Una gran cantidad de mecanismos tiene movimiento, de manera que todos los eslabones se mueven en planos paralelos. A este tipo de movimiento se le llama movimiento plano o bidimensional. El movimiento plano de cuerpo rígido consiste en rotaciones respecto a ejes perpendiculares al plano del movimiento y en traslaciones en las que todos los puntos del cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias rectas o curvilíneas paralelas y todas las líneas contenidas en el cuerpo permanecen paralelas a sus orientaciones originales. En cuanto a los mecanismos espaciales, permiten el movimiento en tres dimensiones. Son posibles combinaciones de rotaciones respecto a un máximo de tres ejes no paralelos y traslaciones en un máximo de tres direcciones diferentes, dependiendo de las restricciones impuestas por las juntas entre eslabones (esféricas, helicoidales, cilíndricas, etcétera).

1.2.3. Movimiento relativo

Todo el movimiento observado en la naturaleza es movimiento relativo; es decir, el movimiento del cuerpo observado es relativo al observador. Por ejemplo, un pasajero sentado en un autobús se mueve relativamente al observador que espera en la parada del autobús, pero está en reposo respecto a otro pasajero sentado. Por otra parte, el pasajero que camina a lo largo del corredor del autobús está en movimiento relativo al pasajero sentado así como en movimiento relativo respecto al observador en la parada.

Al estudio del movimiento o cinemática se le ha llamado la ciencia del movimiento relativo. El diseño y análisis de maquinaria y mecanismos depende de la habilidad del proyectista en visualizar el movimiento relativo de los componentes de la maquinaria.

1.2.4. Diagramas cinemáticos

Si bien las cuatro barras y la corredera-manivela son eslabonamientos muy útiles y se encuentran en miles de aplicaciones, estos eslabonamientos tienen un rendimiento limitado. Los eslabonamientos con más miembros suelen usarse en circunstancias de mayores exigencias¹.

La fig. 1.8 muestra una aplicación típica de un mecanismo de lazos múltiples en el que se requiere un eslabonamiento mecánico. Una ventana batiente debe abrirse 90° hacia afuera desde su antepecho y quedar a suficiente distancia de un lado para satisfacer los códigos de egreso y del otro para permitir la limpieza desde adentro del exterior de la ventana. Además, la fuerza requerida para mover el eslabonamiento debe ser razonablemente pequeña para poder operarlo a mano. Las figs. 1.8 muestran uno de los mecanismos más usados en ventanas batientes en las posiciones a 90° y 30°, respectivamente.

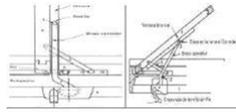


Figura 1.8: Un mecanismo operador de una ventana batiente en dos posiciones

Suele ser difícil visualizar el movimiento de un eslabonamiento de lazos múltiples como el mostrado en la fig. 1.8, especialmente cuando aparecen otros componentes en el mismo diagrama. El primer paso en el análisis del movimiento de mecanismos más complicados es esbozar el diagrama o esqueleto cinemático, como el mostrado en la fig. 1.9. El diagrama cinemático tiene un propósito similar al de un diagrama o esquema de circuito eléctrico; se trata de mostrar sólo los aspectos esenciales del mecanismo, entre los que se cuentan las dimensiones básicas, que afectan su movimiento.



Figura 1.9: Diagrama cinemático equivalente, croquis, de la fig. 1.4

El asume una de dos formas: un croquis (proporcional, pero no exactamente a escala) y el diagrama cinemático a escala (usado generalmente para un análisis adicional de: posición, desplazamiento, velocidad, aceleración, transmisión de fuerzas y pares, etc.). Para una referencia conveniente, los eslabones se numeran (*comenzando con el eslabón a tierra como número 1*), y a las juntas se les asignan letras. Los eslabones de entrada y salida también se rotulan. Un propósito del diagrama cinemático es proporcionar un esquema cinemático

de los movimientos relativos en los mecanismos. Por ejemplo, una junta de pasador describe una rotación relativa, una corredera describe una traslación relativa en línea recta, y así sucesivamente. De hecho, ya hemos usado un diagrama cinemático fuera de escala como ayuda para entender los mecanismos de las bombas de petróleo en las figuras 1.8 y 1.9.

La fig. 1.9 muestra el diagrama (esbozo) cinemático para el eslabonamiento de la ventana batiente. Note que se tienen seis eslabones, cinco juntas de pasador, una junta de corredera y un rodillo en este esbozo. Note también que un lazo del mecanismo contiene un eslabonamiento de deslizador y manivela ($1, 5, 4, 6$). Conectada a la manivela del deslizador se tiene una barra y un rodillo ($2, 3$), que proporciona la entrada para la abertura y el cierre de la ventana. El diagrama cinemático simplifica la inspección visual del mecanismo y, dibujado a escala, proporciona un medio para su análisis ulterior.

Otra aplicación en la que se ha sugerido un mecanismo de lazos múltiples es un motor de carrera variable. Este eslabonamiento varía la carrera del pistón o émbolo en respuesta a los requisitos de potencia. La operación del eslabonamiento de esta carrera se muestra en la fig. 1.10.

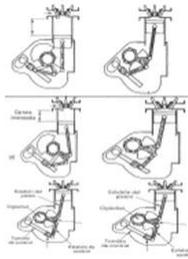


Figura 1.10: Vista en corte de un motor de desplazamiento variable.

Para cada posición, el extremo inferior de un eslabón de control se ajusta a lo largo de un arco prescrito por el yugo de control mostrado. La parte superior del eslabón de control está conectado al eslabón principal que, a su vez, se conecta a una componente que juega el papel de una barra conectora convencional. En esencia, el resultado es un motor con una carrera variable del cigueñal.

Cuando la divergencia del yugo de control respecto a la vertical es ligera, el eslabón queda restringido en su movimiento y la carrera resultante del pistón es pequeña. Conforme la tuerca de control se mueve hacia adentro sobre su tornillo, el ángulo entre el yugo de control y el eje del cilindro se incrementa. Esto ocasiona que el eslabón principal se mueva en un arco más amplio, generando una carrera más larga. El ángulo entre el yugo de control y el eje del cilindro varía entre 0 y 70 ; la carrera resultante varía entre 1 in. y 4.25 in. El eslabonamiento se diseña de manera que la razón de compresión permanezca aproximadamente igual, independientemente de la carrera del pistón.

1.2.5. Grados de libertad

De acuerdo a G. Sandor ¹ y Branicky M. S., S. K. Mitter ⁶, se entiende como el número de entradas independientes requeridas para determinar la posición de todos los eslabones del mecanismo respecto a tierra. Mientras que M. G. Rivera-Padilla ³ y J. Craig ² señalan que el número de grados de libertad que posee un manipulador es el número de posiciones independientes que tendrían que especificarse para poder localizar todas las piezas del mecanismo. Podrían inventarse cientos de miles de tipos diferentes de eslabonamientos. Imagine una bolsa que contenga una gran variedad de componentes de eslabonamientos de las tablas 1.1 y 1.2; eslabones binarios, ternarios, cuaternarios, etc. juntas de pasador, juntas correderas; levas y seguidores de levas; engranes, cadenas, catarinas, bandas, poleas, etc. Además, imagine la posibilidad de formar todo tipo de eslabonamiento juntando esos componentes. Por ejemplo, varios eslabones binarios podrían conectarse por juntas de pasador.

El problema obvio con el eslabonamiento en las figs. 1.11 y 1.12, es que si se conecta un motor a la flecha del eslabón de entrada, el eslabón de salida tal vez no responda directamente debido a los muchos eslabones intermedios. Está claro que se requiere alguna regla de movilidad, por medio de la cual puedan unirse los eslabones. Comenzaremos a desarrollar este tipo de regla examinando un solo eslabón.

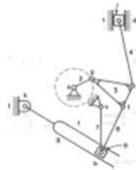


Figura 1.11: Eslabonamiento de desplazamiento variable

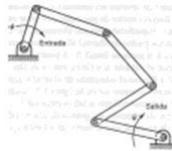


Figura 1.12: Cadena de eslabones conectados entre sí para formar un eslabonamiento

Supongamos que se requiere la posición exacta del eslabón rígido K en el sistema coordenado XY , como se muestra en la fig. 1.12. ¿Cuántas variables independientes especificarán por completo la posición de este eslabón?. La posición del punto A puede alcanzarse, digamos, desde el origen, moviéndonos primero a lo largo del eje X una distancia \mathbf{XA} y luego una distancia \mathbf{YA} en la dirección del eje Y . Así, esas dos coordenadas, que representan dos traslaciones, localizan el punto A . Sin embargo, se requiere más información para definir completamente la posición del eslabón K .

Si se conoce el ángulo que forma la línea que une A con B con respecto al eje X , la posición del eslabón K está especificada en el plano XY . Se tienen entonces tres variables independientes: XB (dos traslaciones y una rotación, A y Y_0 bien tres coordenadas independientes)

asociadas con la posición de un eslabón en el plano. En otras palabras, un eslabón rígido no restringido en el plano tiene tres grados de libertad. Si se tiene un ensamble de n eslabones, ellos tendrán un total de $3n$ grados de libertad antes de que se unan para formar un sistema eslabonado.

Las conexiones entre eslabones tienen como consecuencia la pérdida de grados de libertad del sistema total de eslabones. Una junta de pasador (revoluta) o articulación se llama conector de par inferior; éste se definía en textos antiguos como un conector con contacto superficial entre sus elementos, tal como el que existe entre el pasador y el casquillo. ¿Cuántos grados de libertad elimina una junta de pasador de los eslabones previamente no restringidos al juntarse éstos? Si el punto A sobre el eslabón en la fig. 1.13 es una junta de pasador entre el eslabón K y tierra, entonces, dos variables independientes, X_A y Y_A quedan fijas, dejando a J como el solo grado de libertad restante en el eslabón K .

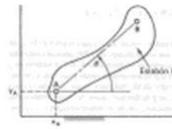


Figura 1.13: Un eslabón solo localizado en un plano XY

En un conjunto de eslabones como el mostrado en la fig. 1.12, cada conexión por pasador eliminará dos grados de libertad de movimiento relativo entre eslabones sucesivos. Esta observación sugiere una ecuación que determinará los grados de libertad de una cadena de n eslabones conectados por f_i juntas de pasador, con la tierra (el eslabón fijo) considerado como uno de los eslabones, ec. 1.1:

$$\text{Grados de libertad} = F = 3(n - 1) - 2f_i \quad (1.1)$$

La ecuación 1.1 se conoce como . El número de eslabones móviles es $(n - 1)$. La junta de pasador permite un grado de libertad relativo entre dos eslabones, de ahí la notación, fig. 1.1 es una de las ecuaciones de movilidad más popular usada en la práctica.

La mayoría de las tareas de los mecanismos requieren que una sola entrada sea transmitida a una sola salida. Por esto, los mecanismos de un solo grado de libertad, es decir, aquellos que tienen un movimiento restringido, son los tipos más frecuentemente usados. Por ejemplo, es fácil ver intuitivamente que las cuatro barras en la figura 1.1 a es un eslabonamiento con un solo grado de libertad. Un análisis intuitivo sobre grados de libertad puede proceder como sigue. Una vez especificada la variable independiente, la posición del punto A es conocida con respecto a A_o y B_o ; como las longitudes de la base del acoplador AB y del eslabón de salida B_oB son conocidas, B_oAB es un triángulo sin movilidad adicional (cero grados de libertad) y la posición del resto del eslabonamiento queda determinada.

Usando la ec. 1.1 para determinar el número de grados de libertad del eslabonamiento en la fig. 1.1, tenemos:

$$n = 4 \quad f_i = 4$$

$$F = 3(4 - 1) - 2(4) = +1$$

El +1 indica un solo grado de libertad para el eslabonamiento.

Intuitivamente, uno puede quedar satisfecho de que este eslabonamiento tiene un solo grado de libertad como lo predice la ecuación. Una vez ensamblados, los eslabones 1 al 4 forman un eslabonamiento de cuatro barras del cual ya se demostró que tiene un solo grado de libertad. Observe que los eslabones 4, 3, 5 y 6 forman un segundo eslabonamiento de cuatro barras con las posiciones de los eslabones 3 y 4 ya determinadas. Como las posiciones de los puntos Q y R están determinadas, QSR forma un triángulo rígido y la posición del mecanismo entero queda especificada.

Tipos de juntas o uniones

Existen otros además de los pasadores y los deslizadores que puedan usarse para conectar los miembros de mecanismos en movimiento plano? Si es así, cancelarán todos ellos dos grados de libertad?. En tanto que las juntas de pasadores y deslizantes (pares inferiores) permiten sólo un grado de libertad de movimiento relativo, las juntas de pares superiores (juntas definidas como juntas que tienen sólo contacto puntual o lineal) pueden permitir un número superior (dos o tres) de grados de libertad de movimiento relativo. Cada una tiene un par inferior equivalente, que consiste en tantos pares inferiores como el número de grados de libertad de movimiento relativo permitido por la junta de par superior.

El contacto de rodamiento sin deslizamiento permite sólo un grado de libertad de movimiento relativo, debido a la ausencia de deslizamiento, lo que deja sólo la rotación relativa. La junta de rodamiento puro puede entonces incluirse como una junta tipo 1. El par inferior equivalente para equivalencia en velocidad instantánea es simplemente una junta de pasador en el centro instantáneo de rotación, que es el punto de contacto entre los dos eslabones con contacto de rodamiento sin deslizamiento. Esta junta, esencialmente de par superior, permite sólo un grado de libertad debido a la restricción adicional contra deslizamiento.

El contacto de rodamiento con deslizamiento restringe sólo un grado de libertad (movimiento relativo en la dirección y). Consideremos primero la combinación de par inferior por equivalencia de velocidad instantánea, que es una combinación de deslizador y junta de pasador. Esta permite dos grados de libertad ($n = 3$, $l = 2$) de movimiento relativo. Los grados de libertad de la junta de rodamiento y deslizamiento pueden verificarse por medio de una *Ecuación de Gruebler* ampliada para incluir juntas de rodamiento y deslizamiento, ec. 1.2:

$$F = 3(n - 1) - 2f_i - 1f_2 \quad (1.2)$$

Donde f_2 es el número de juntas de contacto de rodamiento con deslizamiento (aquellas que permiten dos grados de movimiento relativo a través de la junta).

Usando la ecuación 1.2 para el modelo mismo de par superior:

$$F = 3(2 - 1) - 1 = +2$$

Para el juego de engranes mostrado en la tabla 1.2, en el que el eslabón 1 está fijo, los cojinetes de los engranes son juntas de pasador y el contacto del diente del engrane es de rodamiento con deslizamiento.

Por tanto, $f_i = 2$ y $f_2 = 1$, por lo que:

$$F = 3(3 - 1) - 2(2) - 1 = +1$$

El eslabonamiento de par inferior para equivalencia en velocidad instantánea es un mecanismo de cuatro barras con pivotes fijos localizados en el centro de los engranes y pivotes móviles en los centros de curvatura de los perfiles de los dientes en contacto. El acoplador pasa por el punto primitivo P a lo largo de la línea de acción del engranaje, perpendicularmente a la tangente común de las superficies de contacto de los dientes y también a los dos eslabones conectados a tierra. El modelo de par inferior de un conjunto de engranes predice entonces el mismo número de grados de libertad:

$$F = 3(4 - 1) - 2(4) = +1$$

Una conexión por resorte (tabla 1.2) produce una fuerza mutua entre los dos eslabones que conecta, pero no restringe cinemáticamente el movimiento relativo entre los dos eslabones (suponiendo que el resorte está dentro de su rango de alargamiento y contracción). Dos eslabones binarios y tres juntas de pasador forman el modelo de par inferior de velocidad instantánea equivalente para la conexión por resorte, permitiendo el mismo número de grados de libertad de movimiento relativo entre los eslabones conectados por el resorte. Así, para el eslabonamiento de par inferior equivalente, el número de grados de libertad es:

$$F = 3(4 - 1) - 2(3) = +3$$

La banda y polea o la cadena y rueda dentada, (tabla 1.2), donde la banda o la cadena se mantienen tensas, son también conexiones planas posibles. Un eslabonamiento Watt 11 es la conexión de par inferior de velocidad instantánea equivalente para la banda y polea (sin deslizamiento permitido).

Usando la ecuación 1.2 para el eslabonamiento equivalente de seis barras.

$$F = 3(6 - 1) - 2(7) = +1$$

Capítulo 2

Cinemática del Mecanismo plano de cuatro barras

Al finalizar este capítulo el alumno será capaz de expresar y demostrar la cinemática de los mecanismos planos de cuatro barras (cadena cinemática cerrada), determinara teórica y experimentalmente el desplazamiento lineal y angular de un mecanismo diseñado bajo la Ley de Grashop.

2.1. Análisis de desplazamiento

2.1.1. Ley de Grashof

La ley de Grashof apunta lo siguiente:

La suma de los eslabones más corto y más largo de un eslabonamiento plano de cuatro barras no puede ser mayor que la suma de los dos restantes eslabones para que se tenga una rotación relativa continua entre dos eslabones.

Si se cumple la Ley de Grashof, $l + s < p + q$, se tienen cuatro tipos posibles de mecanismos Grashof.

1. Si $l + s < p + q$
 - Se obtiene un mecanismo de manivela-oscilador cuando el eslabón más corto es la manivela, y la tierra cualquiera de los eslabones adyacentes.
 - Se obtiene un mecanismo de manivela doble (eslabonamiento de arrastre) cuando el eslabón más corto es la tierra.
 - Se forma un mecanismo de oscilador manivela cuando el eslabón más corto es el seguidor.
 - Se obtiene un mecanismo de oscilador doble cuando el eslabón opuesto al más corto es la tierra.
2. Si $l + s > p + q$ Resultan cuatro mecanismos de oscilador triple tipo no Grashof, dependiendo de cuál eslabón es la tierra. Un movimiento relativo continuo no es posible para este caso.
3. Si $l + s = p + q$, los cuatro posibles mecanismos son los del caso 1, pero todos ellos sufren de la condición de punto de cambio.

Las líneas centrales de todos los eslabones resultan colineales, creándose también una condición acodada (que ocurre cuando el de entrada y el acoplador están alineados). Los acodamientos son deseables, por ejemplo, para obtener una alta ventaja mecánica.

- El eslabonamiento de paralelogramo y el eslabonamiento deltoide son casos especiales del inciso.
4. En el primero, $l = q$ y $s = p$ y los eslabones cortos están separados por un eslabón largo.

Los cuatro eslabonamientos son de manivela doble si son controlables a través de los puntos de cambio. Este es el único mecanismo de cuatro barras capaz de producir movimiento paralelo del acoplador, pero todas las trayectorias son arcos circulares.

2.1.2. Ángulo de transmisión y de desviación

G. Sandor ¹ define el como el menor ángulo (agudo) entre la dirección del vector ángulo de transmisión de diferencia de velocidad del eslabón flotante y la dirección de la velocidad absoluta del eslabón de salida, ambas tomadas en el punto de conexión. Él describe el ángulo de transmisión como una medida de la capacidad de transmisión de movimiento desde el eslabón flotante (no del eslabón de entrada del mecanismo) hacia el eslabón de salida.

El ángulo de transmisión, δ , está ilustrado en el eslabonamiento de cuatro barras en las figuras. El vector de diferencia de velocidad, denotado por V_{BA} (velocidad del punto B respecto al punto A), es perpendicular al eslabón flotante (eslabón 3 en este caso), mientras que la velocidad absoluta de la salida es perpendicular al eslabón 4.

Otro procedimiento sugerido por *Bloch*, implica al σ , que es el ángulo más pequeño entre la dirección de la fuerza estática F_{34} transmitida a través del eslabón flotante, y la velocidad absoluta del eslabón de salida, VB en el punto de conexión. Las figuras muestran también el ángulo de desviación. La dirección de la fuerza estática del eslabón flotante es a lo largo de la línea de sus juntas de pasador, ya que el eslabón es un miembro de dos fuerzas (debido a la ausencia de cualquier otra fuerza sobre el eslabón y a la hipótesis de reacción nula en los pasadores de las juntas). El ángulo de presión usado en sistemas de levas y de leva-seguidor es equivalente al ángulo de desviación.

Nótese que en este caso, $\delta + \sigma = 90$. Esta relación es cierta siempre que el eslabón acoplador tenga justo las dos fuerzas de junta opuestas actuando sobre él. Esta relación no es cierta cuando hay un miembro de tres fuerzas. El ángulo de transmisión óptimo es de 90 mientras que el ángulo de desviación óptimo es de 0. Durante el movimiento de un mecanismo, esos ángulos cambiarán, por supuesto, de valor. Un ángulo de transmisión de 0 ocurre en una posición de punto de cambio, en la cual el eslabón de salida, al estar en línea con el acoplador, no se moverá, independientemente de lo grande que sea la fuerza aplicada al eslabón de entrada G. Sandor ¹.

2.1.3. Análisis de desplazamiento: método analítico

El desarrollo de los análisis de desplazamiento y velocidad que siguen, supone que el lector está familiarizado con los números complejos. Los fundamentos de los números complejos, debería repasarse en este momento.

Si un mecanismo tiene un grado de libertad (como el de cuatro barras), al prescribirse un parámetro de posición, como el ángulo del eslabón de entrada, quedará completamente especificada la posición del resto del mecanismo cuando se seleccione una de las dos posibles inversiones geométricas. Se desarrollará aquí una expresión analítica que relacione las posiciones angulares absolutas de los eslabones de un eslabonamiento de cuatro barras. Esto será de mucha mayor utilidad que un procedimiento de análisis gráfico al analizar varias posiciones y/o varios mecanismos diferentes, porque las expresiones desarrolladas en los ejemplos A y B son fácilmente programables para su implementación en computadoras.

El eslabonamiento de cuatro barras mostrado en la fig. 2.1 puede ensamblarse en dos configuraciones diferentes para una orientación dada del eslabón de entrada r_2 . Esas configuraciones se llaman inversiones geométricas. La figura 2.1 muestra la segunda inversión geométrica para la misma posición del eslabón de entrada. Nótese que las dos inversiones geométricas contienen imágenes especulares de r_3 y r_4 respecto al vector r_7 .

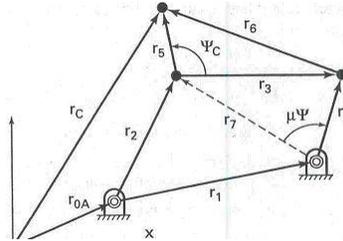


Figura 2.1: Mecanismo de cuatro barras.

Análisis de desplazamiento: método gráfico

Un mecanismo de un grado de libertad como el de cuatro barras puede ser analizado gráficamente respecto a desplazamientos relativos sin gran dificultad. Aunque la exactitud depende del cuidado en la construcción y de la escala del dibujo, usualmente puede obtenerse una precisión aceptable. En la figura se ilustra un método rápido para generar varias posiciones de un mecanismo. Los únicos instrumentos requeridos de dibujo son un escalímetro, un compás y un papel de dibujo transparente.

En la fig. se analiza un mecanismo de cuatro barras de manivela-oscilador, con manivela A_0A de entrada. Respecto a los desplazamientos del punto P trazador de trayectoria (y tal vez los ángulos relativos del eslabón acoplador AB y del eslabón de salida B_0B con respecto a la manivela de entrada).

El eslabón acoplador se reproduce sobre el papel transparente en la figura. Como los puntos A y B del acoplador están restringidos a moverse a lo largo de arcos circulares dibujados con un compás por A alrededor de A_0 y por B alrededor de B_0 , sólo tiene que moverse el dibujo en el papel transparente en (b) sobre las cuatro barras en (a), teniendo cuidado de mantener los puntos A y B sobre sus respectivos arcos y marcar cada posición sucesiva de los puntos A , B y P (oprimiendo la punta del compás por (a) o colocando el dibujo en el papel transparente bajo (a)). La figura siguiente muestra el resultado de esta construcción para una porción del ciclo de movimiento.

Análisis gráfico de desplazamiento del mecanismo de cuatro barras

Como se muestra en la fig. 2.2, queremos construir la posición j -ésima del mecanismo de cuatro barras generador de trayectoria A_0AB_0BP . La posición primera o de partida está marcada con el subíndice 1. Para construir la posición j -ésima, procedemos de la siguiente manera:

1. Se dibujan arcos alrededor de A_0 con radio A_0A_1 y alrededor de B_0 con radio B_0B_1 . Éstas son las trayectorias de las juntas A y B, respectivamente.
2. Se dibuja la posición j de entrada A_0A_j j -ésima del eslabón.
3. Con radio A_1B_1 se dibuja un arco alrededor de A_j que corte la trayectoria de B. Este punto es B_{j*} .
4. Construya el punto P_j por intersección del arco de radio B_1P_1 con centro en B_{j*} , con el arco de radio A_1P_1 con centro en A_j .

Nota Como dos círculos se cortan en dos puntos, habrá dos soluciones. La segunda solución constituye la otra inversión geométrica de este mecanismo de cuatro barras.

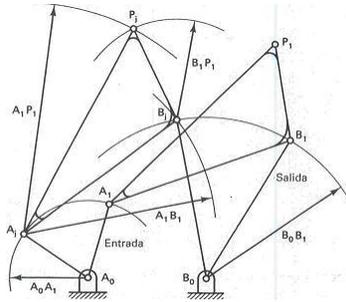


Figura 2.2: Análisis gráfico de desplazamientos del mecanismo de cuatro barras.

2.2. Concepto del Movimiento Relativo

Anteriormente se presentaron los conceptos de movimiento absoluto y relativo. Con ayuda de estos conceptos se facilitará la resolución de problemas de posición, velocidad y aceleración. El análisis siguiente se centrará en la diferencia de movimiento entre puntos del mismo eslabón y en el movimiento relativo entre eslabones distintos.

La tabla 2.1 muestra los cuatro casos posibles que son aplicables al examinar el movimiento de varios puntos en un mecanismo. La matriz de 2×2 en esta tabla representa combinaciones del mismo o puntos diferentes sobre el mismo o diferentes eslabones. Vale la pena comentar cada caso en lo que respecta a la complejidad de un análisis de movimiento.

combinaciones de un mecanismo		
-	mismo punto	puntos diferentes
mismo eslabón	caso 1: trivial	caso 2: movimiento de diferencia
eslabón diferente	caso 3: movimiento relativo	caso 4: tratable

Cuadro 2.1: matriz de combinaciones de un mecanismo

- Caso 1: Mismo punto-mismo eslabón. Por ejemplo, el movimiento del punto Q sobre el eslabón 2 con respecto a sí mismo. análisis trivial. No hay movimiento de Q relativo a sí mismo.
- Caso 2: Diferentes puntos-mismo eslabón. El caso 2 se llama movimiento de diferencia. Ejemplos son el movimiento entre los puntos Q y P sobre el eslabón 2 o el movimiento entre los puntos R y S sobre el eslabón 3.
- Caso 3: Mismo punto-diferentes eslabones (puntos momentáneamente coincidentes). Por ejemplo, el movimiento de R sobre el eslabón 2 con respecto al punto R sobre el eslabón 3, o el movimiento del punto U sobre el eslabón 4 con respecto al punto U momentáneamente coincidente sobre el eslabón. El movimiento de caso 3 se llama movimiento relativo. En algunos casos el análisis es trivial, como con el punto R del eslabón 2 con respecto al punto R sobre el eslabón 3, es decir, cuando el punto es una junta revoluta que une los dos eslabones. En otras situaciones, como con el punto U, que no es una junta, el análisis puede ser bastante complejo: se requiere conocer las trayectorias instantáneas del punto de interés como un punto de cada eslabón con respecto al marco fijo de referencia.
- Caso 4: Puntos diferentes-eslabones diferentes. Por ejemplo, el movimiento del punto V sobre el eslabón 5 con respecto a los puntos *P*, *Q*, *R* o *S* sobre eslabones diferentes. En la mayoría de los casos no se tiene suficiente información para efectuar un análisis de caso 4 de un solo paso. Usualmente es necesario efectuar varios pasos intermedios de análisis de caso 2 y/o caso 3 (determinados por las restricciones físicas de un mecanismo) en vez de un análisis de caso 4 de un solo paso.

Esos cuatro casos de movimiento referido se vuelven cada vez más importantes conforme el análisis se vuelve más complejo (por ejemplo, al análisis de aceleración) y resulta más difícil llevar control de las componentes del movimiento relativo. Saber cuál de los cuatro casos de movimiento está implicado en un caso particular es fundamental en la cinemática de los eslabonamientos. Muchos errores en los análisis cinemáticos de mecanismos resultan de la interpretación errónea del movimiento relativo.

2.3. Análisis de Velocidad: Método Gráfico

El concepto de velocidad puede desarrollarse comenzando con sólo dos elementos de un mecanismo: un eslabón tierra (eslabón 1) Y un eslabón de entrada (eslabón 2) que esté articulado directamente a tierra en A_0 , figs. 2.3 y 2.4. El radio vector R_A de un punto arbitrario A sobre el eslabón 2 se localiza instantáneamente en la posición angular A_0 con respecto al eje x de un sistema de referencia absoluto fijo al eslabón 1. Observe que los ejes en la fig. 2.5, representan un plano complejo, x, iy . Los números complejos se usan en muchos casos en este texto debido a su fácil aplicabilidad a los análisis y síntesis de mecanismos planos.

El eslabón 2 está en proceso de cambiar posición con respecto al eslabón 1. La velocidad de cambio de la posición angular del eslabón 2 con respecto al eje fijo x se llama velocidad

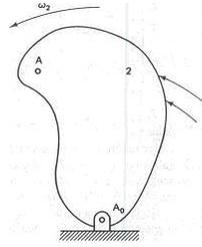
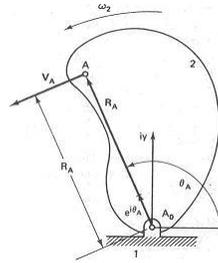
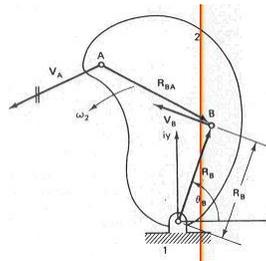


Figura 2.3: Movimiento de un eslabonamiento.

Figura 2.4: El eslabón 2 pivotea en el eslabón a tierra 1 en A_0 y gira en sentido anti-horario con velocidad angular.

angular ω_2 del eslabón 2, y es positiva en sentido anti-horario.

$$\omega_2 = \frac{d\theta_A}{dt} \quad (2.1)$$

Figura 2.5: Velocidad absoluta V_A del punto A sobre el eslabón giratorio 2.

La posición del Punto A con respecto a A_0 puede definirse matemática ente en forma polar o en forma cartesiana. Dos cantidades escalares, la longitud R_A y el ángulo A con respecto al eje x, definen el vector de posición del punto A.

La posición del Punto A con respecto a A_0 puede definirse matemática ente en forma polar o en forma cartesiana. Dos cantidades escalares, la longitud R_A y el ángulo A con respecto al eje x, definen el vector de posición del punto A.

Así en forma polar se tiene, ec. 2.2:

$$R_A = R_A e^{i\theta_A} \quad (2.2)$$

Usando la ecuación de Euler, obtenemos la forma cartesiana, ec. 2.3

$$R_A = R_A \cos \theta_A + i R_A \sin \theta_A \quad (2.3)$$

La velocidad absoluta lineal de un punto es la velocidad de cambio del vector posición de ese punto con respecto a tierra, ec. 2.4

$$V_A = \frac{dR_A}{dt} \quad (2.4)$$

o en forma polar, ec. 2.5

$$V_A = i R_A \frac{d\theta_A}{dt} e^{i\theta_A} = R_A \omega_2 i e^{i\theta_A} = i R_A \omega_2 \quad (2.5)$$

o en forma cartesiana, ec. 2.6

$$V_A = R_A (-\sin \theta_A) \frac{d\theta_A}{dt} + i R_A (\cos \theta_A) \frac{d\theta_A}{dt} = R_A \omega_2 (-\sin \theta_A - i \cos \theta_A) \quad (2.6)$$

La forma polar de 2.4 da mucha información. El valor escalar de la velocidad es el radio R_A multiplicado por la velocidad angular ω_2 mientras que la dirección está a 90 del vector unitario de posición eiA en el mismo sentido que ω_2 . La notación seguida al usar números complejos implica que las rotaciones anti-horarias son positivas; entonces, ω_2 es aquí positiva y la velocidad absoluta 2.5 es hacia la izquierda en la fig. 2.6

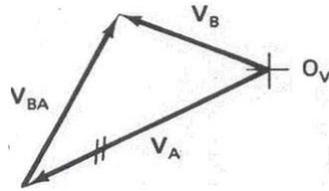


Figura 2.6: Determinación de la diferencia de velocidad $V_{B/A}$ del punto B con respecto al punto A por medio del triángulo de vectores.

Observe que la magnitud de la velocidad lineal y de la velocidad angular están relacionadas, ec. 2.7:

$$|V_A| = V_A = R_A \omega_2 \quad (2.7)$$

Además, la dirección del vector Velocidad es siempre perpendicular al vector posición que se origina en el punto de referencia, ya que si una componente de la velocidad estuviese a lo largo del vector posición, el eslabón se deformaría, lo que contradice la hipótesis de que el eslabón sea rígido G. Sandor ¹.

2.3.1. Velocidad absoluta del punto B

Supongamos que el eslabón 2 contiene otro punto de interés, por ejemplo, el punto B (véase la fig. 2.6). La velocidad absoluta del punto B sería, ec. 2.8:

$$V_B = R_B \omega_2 i e^{i\theta_B} = R_B i \omega_2 \quad (2.8)$$

en forma cartesiana se tiene, ec. 2.9

$$V_B = R_B \omega_2 (-\sin \theta_B + i \cos \theta_B) \quad (2.9)$$

2.3.2. Diferencia de Velocidades

Es la diferencia de dos velocidades absolutas de dos puntos sobre el mismo eslabón. La diferencia de velocidad es, en este caso, $V_{B/A}$ donde el segundo subíndice es el punto de referencia y el primer subíndice es el punto de interés. Así entonces se tiene que la diferencia de velocidades se puede expresar como, ec. 2.10:

$$V_{BA} = V_B - V_A = R_B i \omega_2 \quad (2.10)$$

Una solución vectorial de esta ecuación aparece en la fig. 2.6

2.4. Análisis de Velocidad: Método Analítico

El método de análisis de velocidad escrito en la última sección condujo a una solución gráfica bastante rápida. Cuando se requieren más precisión o análisis repetidos (de un gran número de posiciones del mismo mecanismo o de varios mecanismos diferentes), debe usarse el método analítico equivalente o un paquete de análisis generalizado.

Para ilustrar este método, que se presta a implementación en computadora, consideremos de nuevo el ejemplo de corredera-manivela. Para resolver este ejemplo en forma analítica por números complejos de la Ec. 2.5 se tiene:

$$V_B e^{i\pi/2} = i\omega_2 R_A + i\omega_3 R_{BA} \quad (2.11)$$

Aquí, ec. 2.11, las incógnitas son los dos valores reales V_B y ω_3 .

2.5. Movimiento plano

Traslación: En la , la orientación de todo segmento rectilíneo del cuerpo se mantiene constante. Es decir, las rectas horizontales se mantienen horizontales, las verticales, etc. Un movimiento en el cual una recta se mantenga siempre paralela a la velocidad como sucede con rectas horizontales de un automóvil que recorra una carretera horizontal recta (fig. 14-2a). Se dice que es un movimiento de traslación rectilínea. En la traslación rectilínea, todo punto del cuerpo sigue una trayectoria rectilínea en el sentido del movimiento. En una traslación curvilínea, la orientación de todo segmento rectilíneo sigue siendo invariable pero los distintos puntos no siguen trayectorias rectilíneas (fig. 14-2b). En la traslación coplanaria, la trayectoria de cada punto, sea recta o curva, se mantiene siempre en un plano.

Rotación en torno a un eje fijo: En la , una recta del cuerpo, el eje de rotación, está fija. Los puntos que no son del eje recorren trayectorias circulares centradas en el eje (fig. 14-2c). Si el eje de rotación no corta al cuerpo, podemos imaginar que éste se extiende hasta incluir el eje de rotación (fig. 14-2d). Es decir, a fines cinemáticos, el movimiento del cuerpo es el mismo que tendría si formara parte de un cuerpo rígido mayor que incluyera al eje de rotación. Como cada trayectoria circular está contenida en un plano, la rotación de un cuerpo en torno a un eje fijo es un movimiento plano.

Movimiento plano cualquiera: En un movimiento plano, cada punto del cuerpo permanece en un plano. La traslación coplanaria y la rotación en torno a un eje fijo constituyen tipos concretos de movimiento plano en los cuales las rectas del cuerpo cumplen condiciones particulares. Todo otro tipo de movimiento plano entra en la categoría de movimiento plano cualquiera (fig. 14-2e).

Rotación en torno a un punto fijo: En la rotación en torno a un punto fijo, uno de los puntos del cuerpo está fijo (fig. 14-2f). Cada punto se mueve siguiendo una trayectoria situada en la superficie de una esfera centrada en el punto fijo.

Movimiento cualquiera: Los demás movimientos entran en la categoría de movimiento cualquiera.

2.5.1. Velocidad absoluta y relativa en el movimiento plano

Si son A y B dos puntos cualesquiera, sus posiciones estarán relacionadas, según la regla del triángulo para la adición de vectores por:

$$r_B = r_A + r_{B/A} \quad (2.12)$$

donde r_A y r_B son las posiciones absolutas de los puntos A y B, respectivamente y $r_{B/A}$ es la posición de B relativa a A. Derivando respecto al tiempo la ecuación 14-1 tenemos:

$$V_B = V_A + V_{B/A} \quad (2.13)$$

donde v_A es la velocidad absoluta (medida respecto a un sistema de coordenadas fijo) del punto A, v_B es la velocidad absoluta del punto B y $v_{B/A}$ es la velocidad relativa del punto B (medida relativa al punto A). Las ecuaciones 14-13a y 14-13h son aplicables a dos puntos cualesquiera, tanto si forman parte de un cuerpo rígido como si no.

Sin embargo, si los puntos A y B pertenecen a un cuerpo rígido, su separación será constante y el punto B resulta de recorrer una trayectoria circular alrededor del punto A. Por tanto, la velocidad relativa $v_{B/A}$ vendrá dada por (ec. 14-11)

$$v_{B/A} = r_{B/A}\omega e_t = \omega k \times r_{B/A} \quad (2.14)$$

donde $r_{B/A} = r_B - r_A$ es un vector unitario tangente al movimiento relativo (tangente a la circunferencia centrada en A) y ω es la velocidad angular del cuerpo. Entonces,

$$V_B = V_A + V_{B/A} = V_A r_{B/A} \omega e_t \quad (2.15)$$

Por tanto, la velocidad del punto B consiste en la suma de dos partes: v_A , que representa una traslación de todo el cuerpo con el punto A, y $r_{B/A}\omega e_t$, que representa una rotación de todo el cuerpo alrededor de A (fig. 14-12). Concretamente, la ecuación 14-13d nos dice: La velocidad de un punto cualquiera B de un cuerpo rígido consta de una traslación del cuerpo rígido con un punto A más una rotación del cuerpo rígido en torno al punto A.

La ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-1 3d) es una ecuación vectorial que, en el caso del movimiento plano, tiene dos componentes escalares independientes. Por tanto, la

ecuación de la velocidad relativa se puede utilizar para hallar las dos componentes de la velocidad v_B de un cierto punto cuando se conozcan la velocidad angular ω del cuerpo y la velocidad v_A de otro punto del cuerpo. También puede resolverse dicha ecuación cuando se conozcan las direcciones de las velocidades v_A y v_B (por ejemplo, si A y B se deslizan a lo largo de guías fijas) y se da alguna de las tres magnitudes v_A , v_B u ω

Cuando dos o más cuerpos rígidos estén unidos por un pasador, como en la figura 14-13, podrán escribirse por separado las ecuaciones de la velocidad relativa correspondientes a cada uno de los cuerpos. Uno de los puntos utilizados en cada ecuación deberá ser el punto común (punto B en la fig. 14-13) que une los dos cuerpos; su velocidad será la misma para cada cuerpo. El otro punto en cada ecuación será distinto (A o C) cuya velocidad sea conocida o haya que encontrar. Entonces, las velocidades y las velocidades angulares de los cuerpos podrán relacionarse igualando las dos expresiones de la velocidad del punto común, ec. 2.16:

$$v_B = v_A + v_{B/A} = v_C + v_{B/C} \quad (2.16)$$

o sea

$$v_A + \omega_{AB}K \times r_{B/A} = v_C + \omega_{BC}K \times r_{B/C} \quad (2.17)$$

De ec. 2.16 pueden despejarse dos incógnitas cualesquiera si se dan las otras cantidades.

2.6. Centros Instantáneos

Un o centro es un punto en el que no se tiene velocidad relativa entre dos eslabones de un mecanismo en ese instante, G. Sandor ¹ y J. Craig ². El sistema de dos eslabones en la fig. 2.7 consiste en un eslabón 2 y el eslabón tierra (eslabón 1) que están unidos en A_0 por una junta de pasador (o revoluta). El punto en el que los eslabones 1 y 2 no tienen velocidad relativa es obviamente el punto A_0 . De hecho, para todas las posiciones en el movimiento del eslabón 2, el centro instantáneo (1, 2), está localizado en A_0 .

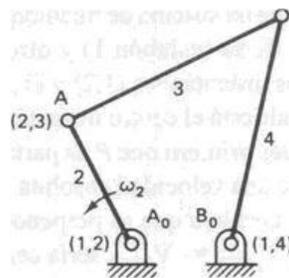


Figura 2.7: Centros instantáneos en un mecanismos plano de cuatro barras

Observe que si se conoce la velocidad absoluta de un punto, digamos el punto A del eslabón 2, entonces con ayuda del centro instantáneo del eslabón 2 con respecto a tierra, una simple construcción dará la velocidad absoluta de cualquier otro punto, como el B. Una línea de calibración se traza desde A_0 hacia la punta del vector velocidad V_A . Existe una relación lineal entre la magnitud de la velocidad y la distancia desde el centro instantáneo (1, 2) (ya que $V = |R|\omega$). Un arco circular con centro en A_0 que pase por B, localiza B sobre la línea

A_0A . V_B se traza paralelamente a V_A , hasta la línea de calibración. Como B_0 y B equidistan de A_0 , V_B tiene la misma magnitud que la velocidad de B. Además, V_B es perpendicular a A_0B , por lo que la velocidad de B queda determinada.

En el eslabonamiento de cuatro barras en la fig.4.2, podemos identificar varios centros instantáneos: el centro instantáneo (1,2) está localizado en A_0 y el centro instantáneo (1,4) está en B_0 . Además, los centros (2,3) y (3,4) están en A y B, respectivamente. Observe que, cuando el eslabonamiento se mueve, esas dos aneos pero sus posiciones no últimas juntas de pasador siguen siendo centros instante permanecen fijas respecto a tierra.

2.6.1. Teorema de Kennedy de los tres centros

El Teorema de Kennedy de los Tres Centros:

Los tres centros instantáneos de tres cuerpos que se mueven relativamente entre sí deben estar a lo largo de una línea recta.

En la fig. 2.8 se muestran tres eslabones: el eslabón tierra (eslabón 1) y otros dos eslabones (2 y 3) que están articulados a tierra.

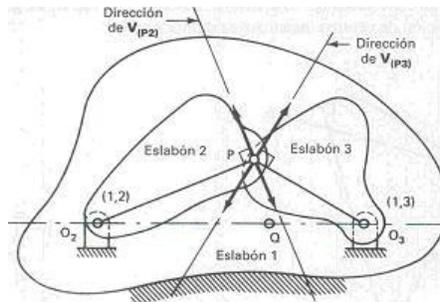


Figura 2.8: Centros instantáneos en un mecanismo plano de cuatro barras

2.6.2. Relación velocidad angular con la distancia entre centros instantáneos

Supóngase que el centro instantáneo (2,3) está localizado en el punto Q, como se muestra en la fig. 2.8, entonces se tiene de la misma figura que:

Si el centro instantáneo relativo (2,3) se encuentra entre los centros instantáneos absolutos (1,2) y (1,3), la razón de velocidad angular es negativa (es decir, los dos eslabones giran en sentidos opuestos). Si el centro instantáneo relativo se encuentra afuera de los otros dos, la razón de velocidad angular es positiva (es decir, los eslabones giran en el mismo sentido). La ec. (4.4) y la ec. (4.5) relacionan una razón de velocidad angular con una razón de distancias entre centros instantáneos.

2.6.3. Centro instantáneo de rotación

En un movimiento plano cualquiera de un cuerpo, no hay ningún punto que se halle siempre en reposo. No obstante, en cada instante, es siempre posible hallar un punto del cuerpo (o de su extensión) que tenga velocidad nula. Este punto recibe el nombre de **centro instantáneo de rotación** o, simplemente, centro instantáneo.

Es importante tener presente que el centro instantáneo de un cuerpo rígido en movimiento plano cualquiera no es un punto fijo. La aceleración del punto que es centro instantáneo no suele ser nula. Por tanto, diferentes puntos del cuerpo rígido serán centro instantáneo en diferentes instantes y la situación del centro instantáneo de rotación se moverá respecto al tiempo.

Para situar el centro instantáneo, supongamos que A y B sean dos puntos cualesquiera del cuerpo rígido cuyas velocidades respectivas sean conocidas y que el punto C sea el centro instantáneo (cuya velocidad es nula) El punto C puede estar en el cuerpo o en su extensión. Como $v_C = 0$ la ecuación de la velocidad relativa nos da ec. 2.18:

$$V_A = \omega K \times r_{A/C} \quad (2.18)$$

por lo que el punto C deberá hallarse en la recta que pasa por A y es perpendicular a V_A . Análogamente, ec. 2.19:

$$V_B = \omega K \times r_{B/C} \quad (2.19)$$

y el punto C deberá estar en la recta que pasa por B es perpendicular a v_B . Si v_A y v_B no son paralelos, las dos rectas mencionadas se cortarán y el punto de intersección será el punto C (fig. 14-18a).

Si las velocidades de los puntos A y B fuesen paralelas, el centro instantáneo debería hallarse en la recta que une dichos puntos- Como el módulo de la velocidad relativa es ωr , el centro instantáneo se hallará a una distancia $r_{A/C} = v_A/\omega$ del punto A y a una distancia $r_{B/C} = v_B/\omega$ del punto B; su situación podrá hallarse por semejanza de triángulos, tal como se indica en las figuras 14-18b y 14-18c.

Si las velocidades de los puntos A y E fuesen iguales en un instante cualquiera, el cuerpo se hallaría instantáneamente en traslación y $\omega = 0$. Este caso se podría incluir en lo visto anteriormente si se considera que el centro instantáneo está en el infinito.

Una vez localizado el centro instantáneo, la velocidad de cualquier otro punto del cuerpo se podrá hallar utilizando la ecuación de la velocidad relativa, ec. 2.20.

$$V_D = V_C + V_{D/C} = \omega K \times r_{D/C} \quad (2.20)$$

Cuando dos o más cuerpos estén unidos por un pasador, podremos hallar un centro instantáneo para cada cuerpo. En general, estos centros instantáneos no coincidirán en posición. La situación de cada centro instantáneo podrá hallarse como antes. Como la velocidad del punto que une dos cuerpos es la misma para cada uno de ellos, los centros instantáneos de uno y otro deberán estar sobre una recta .que pase por el punto común de ambos cuerpos.

La utilización del centro instantáneo no es necesaria para resolver ningún problema. No es más que otra manera de expresar la ecuación de la velocidad relativa, G. Sandor ¹ y M. G. Rivera-Padilla ³.

Simulación de la cinemática de mecanismos planos de cuatro barras

Objetivo: al finalizar esta unidad el alumno será capaz de diseñar, demostrar y aplicar un software de simulación de la cinemática de los mecanismos para determinar su desplazamiento en un plano.

Prácticas, Trabajos y Reactivos de autoevaluación para el 1er Departamental

Prácticas de Laboratorio 1er Departamental

Material para las Prácticas

Para realizar las Prácticas se debe contar con el siguiente material:

1. Juego de mecanismos diseñados bajo la ley de Grashop. Donde los eslabones tendrán las siguientes medidas:
 - $s = 10 \text{ cm}$
 - $l = 17 \text{ cm}$
 - $p = 15 \text{ cm}$
 - $q = 15 \text{ cm}$
2. Hojas de papel bond.
3. Hojas de papel milimétrico.
4. Juego geométrico.
5. Calculadora.

Prácticas

1. Práctica: Graficar una función y una trayectoria con mecanismos de cuatro barras.

Objetivo:

Al finalizar la practica el alumno graficará los valores, en el plano XY , generados por la función y una trayectoria descripta del eslabón seguidor o de salida de uno de los mecanismo de cuatro barras con los que se cuentan en el Laboratorio de Mecanismos, Además de reafirmar la teoría presentada en las secciones de la teoría.

Procedimiento:

- Coloque una hoja de papel bond sobre el bastidor del mecanismo seleccionado. eslabones entrada-salida.
- En la junta de los eslabones 3 y 4 coloque un elemento para graficar, por ejemplo un lápiz.
- Coloque un plano coordenado en las juntas de los eslabones 2 – 3 y 3 – 4.
- Cada plano coordenado será tabulado en una tabla como la tabla 2.2:

valores para una función			
eje X	eje Y	eje X'	eje Y'
X_1	Y_1	eje X'_1	Y'_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_n	Y_m	eje X'_n	Y'_m

Cuadro 2.2: Graficar una función y una trayectoria

2. Práctica: Mecanismo de Manivela Oscilador

Objetivo:

Al finalizar la Práctica el alumno graficará los valores, en el plano XY , generados por la trayectoria descrita del eslabón seguidor o de salida de un mecanismo de cuatro barras, además de reafirmar la teoría presentada en las secciones previas.

Procedimiento:

- Coloque una hoja de papel bond sobre el bastidor del mecanismo seleccionado. eslabones entrada-salida.
- En la junta de los eslabones 3 y 4 coloque un elemento para graficar, por ejemplo un lápiz.
- Coloque un plano coordenado en las juntas de los eslabones 2 – 3 y 3 – 4.
- Cada plano coordenado será tabulado en una tabla como la tabla 2.2:

3. Práctica: Mecanismo de Manivela Doble

Objetivo:

Al finalizar la Práctica el alumno graficará los valores de desplazamiento, en el plano XY , generados por la trayectoria descrita del eslabón seguidor o de salida de un mecanismo de cuatro barras, además de reafirmar la teoría presentada en las secciones previas.

Procedimiento:

- Coloque una hoja de papel bond sobre el bastidor del mecanismo seleccionado. eslabones entrada-salida.
- En la junta de los eslabones 3 y 4 coloque un elemento para graficar, por ejemplo un lápiz.
- Coloque un plano coordenado en las juntas de los eslabones 2 – 3 y 3 – 4.
- Cada plano coordenado será tabulado en una tabla como la tabla 2.2:

4. Mecanismo de Oscilador-Manivela

Objetivo:

Al finalizar la Práctica el alumno graficará los valores, en el plano XY , generados por la trayectoria descrita del eslabón seguidor o de salida de un mecanismo de cuatro barras, además de reafirmar la teoría presentada en las secciones previas.

Procedimiento:

- Coloque una hoja de papel bond sobre el bastidor del mecanismo seleccionado. eslabones entrada-salida.
- En la junta de los eslabones 3 y 4 coloque un elemento para graficar, por ejemplo un lápiz.
- Coloque un plano coordenado en las juntas de los eslabones 2 – 3 y 3 – 4.
- Cada plano coordenado será tabulado en una tabla como la tabla 2.2:

5. Práctica: Mecanismo de Oscilador Doble

Objetivo:

Al finalizar la Práctica el alumno graficará los valores, en el plano XY , generados por la trayectoria descrita del eslabón seguidor o de salida de un mecanismo de cuatro barras, además de reafirmar la teoría presentada en las secciones previas.

Procedimiento:

- Coloque una hoja de papel bond sobre el bastidor del mecanismo seleccionado. eslabones entrada-salida.
- En la junta de los eslabones 3 y 4 coloque un elemento para graficar, por ejemplo un lápiz.
- Coloque un plano coordenado en las juntas de los eslabones 2 – 3 y 3 – 4.
- Cada plano coordenado será tabulado en una tabla como la tabla 2.2:

6. Práctica: Ángulos de transmisión y de desviación en Mecanismos de cuatro Barras

Objetivo:

Al finalizar la practica el alumno graficará los ángulos de transmisión y de desviación en mecanismos de cuatro barras, en el plano XY, con el mecanismo diseñado bajo la ley de Grashof.

- Coloque una hoja de papel bond sobre el bastidor del mecanismo seleccionado.
- En la junta de los eslabones 3 y 4 coloque un elemento graficador, por ejemplo un lápiz.
- Coloque un plano coordenado en las juntas de los eslabones 2 - 3 y 3 - 4.
- Cada plano coordenado será tabulado en una tabla.

Ejercicios para examen

Resuelva los siguientes ejercicios por medio del *método vectorial* y el *método centros instantáneos*.

1. La barra AB en la figura siguiente gira con una velocidad angular de 10 rad/s . Determine la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del punto C .

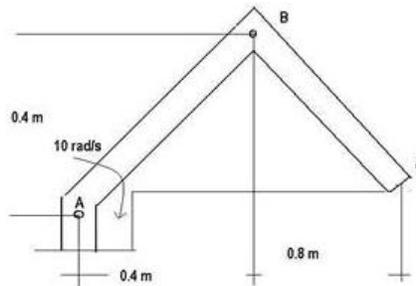


Figura 2.9: Ejercicio 1

2. La barra OQ está girando en la dirección de las manecillas del reloj a 4 rad/s . ¿Cuáles son los vectores de la velocidad angular de las barras OQ y PQ ?

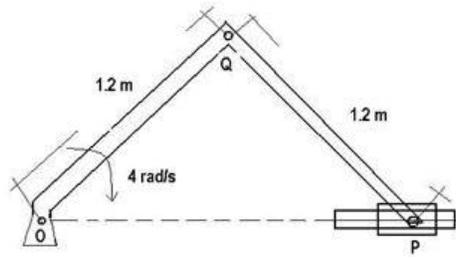


Figura 2.10: Ejercicio 2

3. La barra AB gira a 10 rad/s en la dirección de las manecillas del reloj. Determine la velocidad angular de la barra CD .

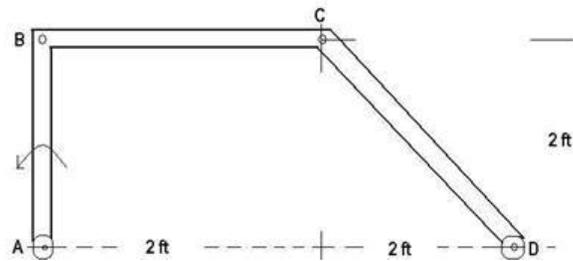


Figura 2.11: Ejercicio 3

4. **Problema de examen**, John y Paul toman al mismo tiempo una barra de pan por sus extremos aplicando una fuerza proporcional a sus respectivos cuerpos determine el punto donde se fracturará la barra de pan, asuma lo siguiente:
- a.- La longitud del pan es 30 cm.
 - b.- La masa de John es tres veces de la de Paul.
 - c.- La masa de John es la misma de la de Paul.
 - d.- La masa de John es un tercio de la de Paul.

Reactivos de autoevaluación

Complete o responda las siguientes sentencias, *todas las respuestas se encuentran en los apuntes*, entregue los reactivos resueltos el día de la 1ra evaluación:

1. ¿Defina que es cinemática ...?
2. ¿Defina que es dinámica ...?
3. ¿Cuáles son las funciones de un mecanismo ...?
4. ¿Cuántos tipos de elementos de máquina se conocen ...?
5. ¿De que esta compuesta una máquina ...?
6. ¿Cuántos tipos de cadenas cinemáticas conoce ...?
7. ¿Qué es una estructura?...?
8. ¿Cuántas velocidades se analizan en el movimiento plano del cuerpo rígido ...?
9. ¿La velocidad angular actúa en el eje k, porque ...?
10. ¿Demuestre matemáticamente que existe el movimiento relativo ...?
11. ¿Demuestre matemáticamente en el plano absoluto la velocidad relativa ...?
12. ¿Un mecanismo es ...?

13. ¿Un mecanismo de 6 grados de libertad se da cuando ...?
14. ¿Qué es un grado de libertad en un mecanismo ...?
15. ¿Una máquina es ...?
16. ¿Los mecanismos se clasifican como ...?
17. ¿La ley de Grashop dice ...?
18. ¿Cuántas configuraciones de mecanismos se pueden tener con un mecanismo de cuatro barras diseñado bajo la *ley de Grashop* ...?
19. ¿Qué significa el ángulo de transmisión y de desviación en un mecanismo ...?
20. ¿Cuántos métodos hay en el análisis de velocidad en mecanismos ...?
21. ¿Cuál es el mejor de los métodos mencionados anteriormente ...?
22. ¿Qué es un par cinemático ...?
23. ¿Defina que es una cadena cinemática abierta ...?
24. ¿Defina que es una cadena cinemática cerrada ...?
25. ¿Cuántas tareas pueden realizar los mecanismos ...?

26. ¿Cuántos movimientos tiene un mecanismo plano ...?

27. ¿Cuales son esos movimientos...?

28. ¿Qué función realiza un resorte en un sistema de suspensión en un automovil ...?

Bibliografía

1. G. Sandor (1998). Mechanism Design: Analysis and Synthesis. Edit. Prentice Hall, Third Edition.
2. J. Craig (2006). Introduction to robotics. *Edit Prentice Hall*, Third Edition.
3. M. G. Rivera-Padilla (2000). Introducción a los Mecanismos. *Edit. Politécnico*, Primera Edición.
4. Robert L. Mott, (1995). Diseño de elementos de máquinas, *Edit. Prentice Hall*.
5. Robert C. Juvinall, (1991). Fundamentos de Diseño para Ingeniería mecánica, *Edit LIMUSA*.
6. Branicky M. S., S. K. Mitter (1995). Algorithms for optimal hybrid control. *Proceeding of the 34th Conference on Decision And Control*, pp. 2661-2665.

Índice alfabético

ángulo de desviación, 16
ángulo de transmisión, 16

cadenas cinemáticas, 7
centro instantáneo, 24
cinemática, 2, 8

diagrama cinemático, 8

Ecuación de Gruebler, 11
elemento de máquina, 2
elementos de máquina flexibles, 2
elementos de máquina rígidos, 2
eslabonamiento, 3
eslabonamiento de lazo cerrado, 3
eslabones de seis barras, 7
Estructuras, 7

generación de movimiento, 4
generación de trayectoria, 4
generador de función, 4
grado de libertad, 10

L, 4

máquina, 2
mecanismo, 2
mecanismo de corredera y manivela, 6
mecanismo de deslizador y manivela, 6
movimiento plano, 7
movimiento relativo, 7

rotación alrededor de un eje fijo, 22

Teorema de Kennedy, 25
tipos de juntas, 12
traslación de un cuerpo rígido, 22

Apéndice A

Introducción a la física clásica